



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

1(1). Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Considere $J_r(\lambda)$ a matriz quadrada $r \times r$, com valor λ na diagonal, e 1 na subdiagonal, e 0 nos outros lugares (isto é, $J_r(\lambda) =$

ou da forma $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \lambda & 0 & 0 & & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \lambda & & & & \\ & 0 & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \lambda & 0 & \\ & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & \lambda \end{array} \right)_r.$$

Então existem k matrizes $J_{r_i}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq k$, de maneira que A é semelhante a uma matriz em blocos da forma

$$\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad (\text{Note que } r_1 + r_2 + \dots + r_k = n).$$

□

1(2). Podemos fatorar o polinômio característico

$$p(t) = t^5 + 2at^3 + ta^2 = t \underbrace{(t^4 + 2at^2 + a^2)}_{b(t)}.$$

O termo $b(t)$ é uma biquadrada, onde realizando a mudança de variáveis $u = t^2$, obtemos $u^2 + 2au + a^2$, que é quadrado perfeito da forma $(u+a)^2$, portanto $p(t) = t(u+a)^2 = t(t^2+a)^2$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Se $a = 0$, teremos $p(t) = t^5$, o que induz (a menos de uma mudança de base) as decomposições para A da seguinte maneira:

$$Q_{5 \times 5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$J_5(0), J_4(0) \quad J_5(0), J_3(0), J_3(0) \quad J_5(0), J_3(0), J_3(0), J_2(0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$J_2(0), J_3(0) \quad J_2(0), J_2(0), J_3(0)$

Se $a > 0$, teremos $p(t) = t(t + \sqrt{a})^2(t - \sqrt{a})^2$, induzindo as decomposições

~~$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \begin{matrix} \sqrt{a} & \\ 1 & \sqrt{a} \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} -\sqrt{a} \\ 1 & -\sqrt{a} \end{matrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \begin{matrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} -\sqrt{a} & 0 \\ 1 & -\sqrt{a} \end{matrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \begin{matrix} \sqrt{a} & \\ 1 & \sqrt{a} \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} -\sqrt{a} \\ 1 & -\sqrt{a} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$J_3(0), J_2(\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a}) \quad J_3(0), J_3(\sqrt{a}), J_3(\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a}) \quad J_3(0), J_3(\sqrt{a}), J_3(\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a})$

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \begin{matrix} \sqrt{a} & \\ 1 & \sqrt{a} \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} -\sqrt{a} \\ 1 & -\sqrt{a} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$J_3(0), J_2(\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a}), J_2(-\sqrt{a})$

FAVOR **NÃO** ESCREVER NO VERSO!
NÃO ULTRAPASSAR A LINHA DA MARGEM!



Por fim, se $a < 0$, então $p(t) = t(t^2 + a)^2$, e não pode ser mais fatorado em termos lineares sobre o corpo dos reais.

Isso induz a decomposição

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

□

1(3). Dado que o polinômio característico de B é dado por $p(t) = (t - 1)^n$, temos que B é semelhante a uma matriz da forma $\begin{pmatrix} J_{r_1}(1) & & 0 \\ & J_{r_2}(1) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{r_k}(1) \end{pmatrix}$, onde $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Se mostrarmos que $J_\ell(1)$ é similar a $J_\ell(1)^{-1}$, basta aplicar em cada bloco, e teremos o resultado geral.

Note que $\det(J_\ell(1)) = 1$, logo basta encontrar uma inversa à direita.

Seja $J_\ell(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, e considere $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ \vdots & & & \\ (-1)^{r-1} & (-1)^{r-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Não é difícil ver que $J_\ell(1) \cdot A = \text{Id}$, logo $A = J_\ell(1)^{-1}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Agora, tanto o polinômio característico de $J_\lambda(1)$ quanto de A é $(t-1)^2$, quanto o polinômio minimal de $J_\lambda(1)$ e de A é também $(t-1)^2$.

Portanto, tanto $J_\lambda(1)$ quanto A possuem a mesma forma de Jordan, que de fato é $J_\lambda(1)$, e portanto $A = P J_\lambda(1) \cdot P^{-1}$
 $\Rightarrow J_\lambda(1) = P^{-1} A P.$ $\square$

3(1). Dada uma sequência de variáveis aleatórias X_n , independentes e com esperança limitada, e considerando ~~que~~ que cada uma possui média μ e desvio padrão σ , considere a variável $S_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.
Então $S_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$.



2(2). Temos que, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_{\partial R} \nabla u \, dn = \iiint_R \nabla \cdot \nabla u \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_R \Delta u \, dx \, dy \, dz.$$

□

2(1). Seja R uma superfície e ~~seu~~ seu bordo. Temos que, se $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\int_R \nabla f \, dS = \int_{\partial R} \nabla f \, dA$$

Se ∂R for uma curva,

Seja S um sólido em $\mathbb{R}^3$, e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável. Então o flux de f em S satisfaz

$$\int_S \nabla \cdot f \, dS = \int_{\partial S} f \, dA$$

Seja A uma superfície em $\mathbb{R}^3$, e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então f satisfaz

~~$$\int_A \nabla f \, dA = \int_C f \, dr$$~~

$$\int_A \nabla f \, dA = \int_C f \cdot r \, dr, \text{ onde}$$

C é a curva do bordo de A , parametrizada seguindo a orientação de t .

□